Variable aléatoire

1. Notion de variable aléatoire

Définitions : Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire** sur Ω est une fonction X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de ces réels est noté $X(\Omega)$. Une variable aléatoire est **discrète** si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs : $X \in \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

Autrement dit, on définit une variable aléatoire sur Ω quand on associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience aléatoire.

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $\{X=k\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend la valeur k".
- $\{X \geq k\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à k".
- De la même manière, on définit les événements suivants :

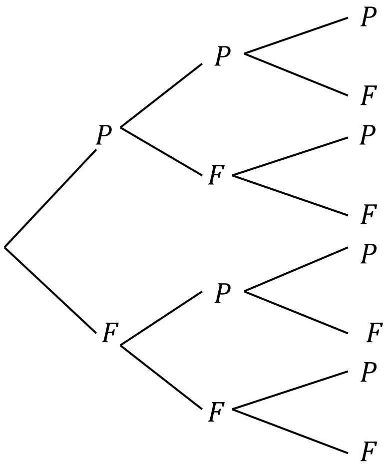
$\{X > k\}$, $\{X < k\}$, et $\{X \leq k\}$.

Exemple : On lance une pièce de monnaie trois fois de suite et on compte le nombre de « piles » obtenus.
$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

2. Loi de probabilité d'une VA

Définition : Lorsqu'à chaque valeur x_i, avec $1 \leq i \leq n$, prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité** de X.

Exemple : On lance une pièce de monnaie trois fois de suite et on compte le nombre de « piles » obtenus.



Loi de probabilité de X :

Valeurs x_i	0	1	2	3
Probabilité $P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exercices : n° 20, 16 et 17 page 321 + n° 33 page 322 + n° 53 page 325.

3. Espérance

Définition : Soit une variable aléatoire X qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. **L'espérance de X** est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n).$$

Remarque1 : On peut simplifier cette formule en utilisant la notation « sigma » qui signifie somme :

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ avec $P(X = x_i) = p_i$

signifie « somme pour i allant de 1 à n ».

Remarque 2 : L'espérance mathématique n'est rien d'autre que la moyenne.

Ex : On lance une pièce de monnaie trois fois de suite et on compte le nombre de « piles » obtenus.

Valeurs x_i	0	1	2	3
Probabilité $P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8}$$

$$E(X) = 1{,}5$$

En moyenne, on obtient 1,5 piles.

Remarque : par extension on parle souvent d'espérance de gain pour les jeux d'argent. Un jeu sera équitable si l'espérance du gain est nulle. Si elle est positive, le jeu sera favorable au joueur, sinon le jeu sera défavorable au joueur.

Exercices : n° 37 page 322 + n° 64 et 74 pages 326 et 327.
PROBABILITES ET JEU D'ARGENT : voir fichier **Exercices espérance de gain - corrigés en vidéo**

4. Variance et écart-type

Définition : Soit une variable aléatoire X qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$. **La variance de X** est le nombre noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \left(x_1 - E(X)\right)^2 \times p_1 + \left(x_2 - E(X)\right)^2 \times p_2 + \dots + \left(x_n - E(X)\right)^2 \times p_n$$

Remarque 1 : en écriture simplifiée : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \times p_i$

Remarque 2 : La variance est toujours un nombre positif, carrés et probabilités étant des nombres positifs.

Propriété : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2 - E(X)^2$

Définition : On appelle **écart-type de X** le nombre $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variance permet surtout de calculer l'écart-type. L'écart-type est un indice de dispersion autour de la moyenne. En effet, considérons deux cas simples :
cas 1 : on a trois notes : 9 – 10 – 11
cas 2 : on a trois notes : 0 – 10 – 20
Dans les deux cas, la moyenne est de 10, mais cela ne décrit pas entièrement la situation.
Dans le cas 1, les notes sont très rapprochées de la moyenne ; l'écart-type sera très petit.
Dans le cas 2, les notes sont très éloignées de la moyenne ; l'écart-type sera très grand.

Ex : On lance une pièce de monnaie trois fois de suite et on compte le nombre de « piles » obtenus.

Valeurs x_i	0	1	2	3
Probabilité $P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 1{,}5$$

$$V(X) = (0 - 1{,}5)^2 \times \frac{1}{8} + (1 - 1{,}5)^2 \times \frac{3}{8} + (2 - 1{,}5)^2 \times \frac{3}{8} + (3 - 1{,}5)^2 \times \frac{1}{8} = 0{,}46875$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}4675} \approx 0{,}68$$

Propriétés : Soient a et b des réels, alors : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX) = a^2 V(X)$

Exemple : On décide de doubler les gains et d'imposer une mise de 5 euros. On a donc E(2X-5)= -1 .